

I. Primitives d'une fonction numérique :

a. Définition :

- Une fonction F est une primitive d'une fonction f définie sur un intervalle I si $\forall x \in I : F'(x) = f(x)$.

b. Exemple :

- Fonction primitive de la fonction $f(x) = 4x + 2$ sur $\mathbb{R}$ est $F : x \rightarrow x^2 + 3x$.
- Fonction primitive de la fonction $f(x) = \cos x$ sur $\mathbb{R}$ est $F(x) = 3 + \sin x$.

c. Propriété :

- Toute fonction continue sur un intervalle I admet une fonction primitive sur I .

d. Propriété :

F est une primitive d'une fonction f définie sur un intervalle I

- Toute fonction primitive G de f sur I est de la forme $G(x) = F(x) + c ; (c \in \mathbb{R})$.

e. Exemple :

Les fonctions primitives de la fonction $f(x) = 4x + 2$ sur $\mathbb{R}$ sont de la forme $F(x) = x^2 + 3x + c$ avec $c \in \mathbb{R}$.

f. Propriété :

F est une primitive d'une fonction f définie sur un intervalle I

$x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$; il existe une seule fonction primitive G de f qui vérifie la condition $G(x_0) = y_0$.

g. Exemple :

Déterminer la fonction primitive de $f(x) = x^3 - 2x + 3$ qui prend la valeur 0 (zéro) en -1 .

Les primitives de f sont de la forme $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + 3x + c ; c \in \mathbb{R}$

$$\text{Puisque } F(-1) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}(-1)^4 - (-1)^2 + 3 \times (-1) + c = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} - 4 + c = 0$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{15}{4}$$

Conclusion : La fonction primitive de $f(x) = x^3 - 2x + 3$ qui prend la valeur 0 (zéro) en -1 est :

$$G(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + 3x + \frac{15}{4}.$$

II. Fonctions primitives de la somme de deux fonctions – le produit d'une fonction par un réel α :



a. Propriété :

F et G sont les primitives respectivement de f et g sur I on a :

- ❖ $F+G$ est une primitive de $f+g$.
- ❖ αF est une primitive de αf .

b. Exemple :

Soient $f(x) = 3x$ et $g(x) = \cos(x)$, leurs fonctions primitives sont respectivement $F(x) = 6x^2 + c$ et $G(x) = \sin x + c'$ avec c et $c' \in \mathbb{R}$

III. Operations sur les fonctions primitives - Tableau des fonctions primitives des fonctions usuelles

Operations sur les fonctions primitives		Tableau des fonctions primitives des fonctions usuelles	
Fonction h	H primitive de h	Fonction f	F primitives de f ($c \in \mathbb{R}$)
$h = f' + g'$	$H = f + g$	$f(x) = 0$	$F(x) = c$
$h = \alpha f'$	$H = \alpha f$	$f(x) = a; (a \in \mathbb{R})$	$F(x) = ax + c$
$h = f' \times g + f \times g'$	$H = f \times g$	$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + c$
$h = -\frac{g'}{g^2}$	$H = \frac{1}{g}$	$f(x) = x^n; (n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\})$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$
$h = \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$	$H = \frac{f}{g}$	$f(x) = x^r; (r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\})$	$F(x) = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + c$
$h = f' \times f^n \text{ مع } n \neq -1$	$H = \frac{1}{n+1}f^{n+1}$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + c$
$h = f' \times f^r \text{ مع } r \neq -1$	$H = \frac{1}{r+1}f^{r+1}$	$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x) + c$
$h = f' \times g' \circ f$	$H = g \circ f$	$f(x) = \sin(ax + b) \text{ } a \neq 0$	$F(x) = -\frac{1}{a}\cos(ax + b) + c$
$h = f'(ax + b) \text{ } a \neq 0$	$H = \frac{1}{a}f(ax + b)$	$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x) + c$
		$f(x) = \cos(ax + b) \text{ } a \neq 0$	$F(x) = \frac{1}{a}\sin(ax + b) + c$
		$f(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$F(x) = \tan(x) + c$
		$f(x) = \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$	$F(x) = 2\sqrt{f(x)} + c$
		$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x} + c$